IA – Hoja de Ejercicios 2

**¡Teoría Básica!**

Elementos del Lenguaje

* Constantes: (MAYUSCULAS)
* Variables: (minusculas)
* Predicados: (MAYUSCULAS)
* Funciones: (minusculas)
* Simbolos de puntuación: , () [] {}

Conectores:

* Not ¬
* And ∧
* Or ∨
* Si ⇒
* Si X entonces Y ⇔ (en orden de prioridad)

Cuantificadores:

* Cuantificador universal (∀)
* Cuantificador existencial (∃)

Formulas:

**Formulas bien formadas (fbf)**: Fbf cerrada: Aquella en la que todas las variables están cuantificadas. Cuantificada: ….

Ejemplo fbf:

* (∀x)(∀y)PadreDe(x,y) “Todo el mundo es padre de todo el mundo”
* (∃x)(∃y)PadreDe(x,y) “Existe alguien que tiene al menos un padre”
* (∀x)(∃y)PadreDe(x,y) “Todo el mundo es padre de alguien”
* (∃y)(∀x)PadreDe(x,y) “Hay alguien que tiene a todo el mundo como padre”
* (∃x)(∀y)PadreDe(x,y) “Hay alguien que es padre de todo el mundo”
* (∀y)(∃x)PadreDe(x,y) “Todo el mundo tiene al menos un padre”

**Reglas de equivalencia**

Reglas de equivalencia de lógica proposicional && Renombramiento de variables cuantificadas.

* (∀x) w(x) ≡ (∀y) w(y)
* (∃x) w(x) ≡ (∃y) w(y)
* ¬(∀x) w(x) ≡ (∃x) ¬w(x)
* ¬(∃x) w(x) ≡ (∀x) ¬w(x)

El nuevo nombre debe ser diferente que el de las otras variables en la fbf

Dos FBFs distintas w1, w2 son equivalentes (w1≡w2) cuando tienen la misma tabla de verdad

Elemento neutro:

* (w1∧V) ≡ w1
* (w1∨F) ≡ w1

Leyes de absorción:

* (w1 ∨(w1∧w2)) ≡ w1 (w1 ∧(w1∨w2)) ≡ w1

Ley de contradicción / ley del medio excluido:

* (w1∧¬w1) ≡ F
* (w1∨¬w1) ≡ V

Leyes de dominación:

* (w1∧F) ≡ F
* (w1 ∨ V) ≡ V

Idempotencia:

* (w1∧w1) ≡ w1
* (w1∨w1) ≡ w1

Eliminación de la doble negación:

* ¬¬w1≡w1

Leyes de De Morgan:

* ¬(w1∨w2) ≡ ¬w1∧¬w2
* ¬(w1∧w2) ≡ ¬w1∨¬w2

Conmutatividad:

* w1∨w2 ≡ w2∨w1
* w1∧w2 ≡ w2∧w1

Leyes asociativas:

* [conjunción] (w1∧w2)∧w3 ≡ w1∧(w2∧w3) ≡ w1∧w2∧w3
* [disyunción] (w1∨ w2)∨w3 ≡ w1∨(w2∨w3)≡ w1∨w2∨w3

Leyes distributivas:

* w1∧(w2∨w3) ≡ (w1∧w2)∨(w1∧w3)
* w1∨(w2∧w3) ≡ (w1∨w2)∧(w1∨w3).

Definición de condicional:

* w1⇒w2 ≡ ¬w1∨w2

Contraposición:

* w1⇒w2 ≡ ¬w2⇒ ¬w1

Def. de bicondicional:

* w1⇔w2≡(w1⇒w2)∧(w2⇒w1) ≡ (w1∧w2)∨(¬w1∧¬w2)

**Reglas de inferencia ¿?????????!?!?!?!??!?!?!??!?!?!?!?!?!?!?!?!?!?!?¿!?¿!?!¿?!¿!?¿!?!¿?!¿¿¿??¿?¿?¿?**

Reglas de inferencia de lógica proposicional

Instanciación del universal (IU) [Correcta]

(∀x) w(x) ├─IU w(A), donde A es alguno de los valores en el dominio de x

Generalización del existencial (GE) [Correcta]

w(A) ├─GE (∃x) w(x), donde x es el símbolo de una variable cuyo dominio incluye a A

**¿?????????!?!?!?!??!?!?!??!?!?!?!?!?!?!?!?!?!?!?¿!?¿!?!¿?!¿!?¿!?!¿?!¿¿¿??¿?¿?¿?**

**Skolemización**

Un cuantificador existencial (∃) puede ser eliminado de una fbf reemplazando cada ocurrencia de la variable cuantificada existencialmente por una constante o bien una función.

Objeto Skolem (Constante):

(∃x) w(x) == forma Skolem = w(Sk)

**Metateoremas para formar skolem**

**SKI**: La forma de Skolem de una fbf NO es equivalente a la fbf original

w(Sk)╞═(∃x) w(x) PERO (∃x) w(x)╞//═ w(Sk)

EJ: P(A) ∨ P(B) ╞═ (∃x) P(x) PERO P(A) ∨ P(B) ╞//═ P(Sk)

**SKII:**

Un conjunto de fbfs es satisfacible si su forma de Skolem es satisfacible.

Un conjunto de fbfs es insatisfacible si su forma de Skolem es insatisfacible

Satisfacción y modelos?????? PAG 44 diaps 🡪 Consecuencia lógica pag 45

**FNC (¿¿FORMA NORMAL CONJUNTIVA??) PAG 46**

1.Eliminar implicaciones ⇔, ⇒:

w1⇒w2 ≡ ¬w1∨w2

w1 ⇔ w2 ≡ (¬w1∨w2) ∧ (¬w2∨w1)

2.Reducir el ámbito de la negación ¬

Leyes de De Morgan

¬(w1 ∨ w2) ≡ ¬w1 ∧ ¬w2

¬(w1 ∧ w2) ≡ ¬w1 ∨ ¬w2

Eliminación de negaciones dobles (¬¬w ≡ w)

Combinación de ¬ con cuantificadores

¬(∀x) w(x) ≡ (∃x) ¬w(x)

¬(∃x) w(x) ≡ (∀x) ¬w(x)

3.Estandarizar las variables: Renombrar las variables de tal forma que variables distintas tengan símbolos (nombres) diferentes

[(∀x) [P(x)⇒R(x)]] ∨ [(∃x) P(x)] ≡ [(∀x) [P(x)⇒R(x)]] ∨ [(∃y) P(y)]

4.Skolemización: Eliminar los cuantificadores existenciales reemplazando las variables correspondientes por constantes de Skolem o funciones de Skolem.

5.Convertir a forma prenexa desplazando todos los cuantificadores universales al principio de la fbf

fbf en forma prenexa = Prefijo (lista de cuantificadores) + Matriz (fórmula sin cuantificadores

6.Eliminar los cuantificadores universales

7.Usar leyes distributivas y reglas de equivalencia de lógica proposicional para transformar la matriz a FNC (convertirla en una conjunción de disyunciones (forma normal conjuntiva))

Ejemplo 1:

Conversión a FNC [(∀x) Q(x)] ⇒

(∀x)(∀y) [(∃z) [P(x,y,z) ⇒ (∀u) R(x,y,u,z)]

1. Eliminación de implicaciones ⇔, ⇒

¬[(∀x) Q(x)] ∨

(∀x)(∀y) [(∃z) [¬P(x,y,z) ∨ (∀u) R(x,y,u,z)]

2. Reducción del ámbito de las negaciones:

[(∃x) ¬Q(x)] ∨

(∀x)(∀y) [(∃z) [¬P(x,y,z) ∨ (∀u) R(x,y,u,z)]

3. Estandarización de variables [(∃w) ¬Q(w)] ∨ (∀x)(∀y) [(∃z) [¬P(x,y,z) ∨ (∀u) R(x,y,u,z)]

4. Skolemización: ¬Q(A)∨(∀x,y)[¬P(x,y,f(x,y))∨(∀u)R(x,y,u,f(x,y))]

5. Forma prenexa: (∀x,y,u)[¬Q(A)∨¬P(x,y,f(x,y))∨R(x,y,u,f(x,y))]

6. Eliminación de los cuantificadores universales ¬Q(A) ∨ ¬P(x,y,f(x,y)) ∨ R(x,y,u,f(x,y))

7. Conversión a FNC: la fbf ya está en FNC

Ejemplo 2: Conversión a FNC “Todo el que ama a todos los animales es amado por alguien” (∀x)[(∀y){Animal(y) ⇒ AmaA(x,y)} ⇒ (∃y) AmaA(y,x)]

1. Eliminación de implicaciones ⇔, ⇒

(∀x)[¬(∀y){¬Animal(y) ∨ AmaA(x,y)} ∨ (∃y) AmaA(y,x)]

2. Reducción del ámbito de las negaciones:

(∀x)[(∃y){Animal(y) ∧ ¬AmaA(x,y)} ∨ (∃y) AmaA(y,x)]

3. Estandarización de variables

(∀x)[(∃y){Animal(y)∧¬AmaA(x,y)}∨(∃z)AmaA(z,x)]

4. Skolemización:

(∀x)[{Animal(f(x)) ∧ ¬AmaA(x,f(x))} ∨ AmaA(g(x),x)]

5. Forma prenexa: la fbf ya está en forma prenexa

6. Eliminación de cuantificadores universales

{Animal(f(x))∧¬AmaA(x,f(x))} ∨ AmaA(g(x),x)

7. Conversión a FNC usando leyes distributivas y reglas de equivalencia

{Animal(f(x)) ∨ AmaA(g(x),x)} ∧ {¬AmaA(x,f(x)) ∨ AmaA(g(x),x)}

**PAG 49 Reglas de inferencia**

1. Considera las siguientes frases:

* Los caballos son animales.
* EsAnimal(C)
* (∀x) (Caballo(x) => EsAnimal(x))
* Mickey Mouse es un animal.
* EsAnimal(MM)
* (3y) (MikeyMouse(y) => EsAnimal(y))
* Hay al menos dos animales de cada especie.
* (∀x) (3y) (EsAnimal(x) ^ EsEspecie(x, y) => (Haber2(x))
* (∀x) (Haber2(x) ⬄ (EsAnimal(x) ^ EsEspecie(x,especie(x)))
* (∀x) (3y) (Haber2(x) ⬄ (EsAnimal(x) ^ EsEspecie(x, y)))
* Los animales de al menos una especie tienen cuatro patas.
* (∀x) (EsAnimal(x) ^ Haber1(especie(x)) ^ CuatroPatas(especie(x)))

Formaliza estas frases en lógica de predicados identificando las constantes, variables, predicados y funciones necesarios para dicha formalización. Para cada predicado y función explica brevemente su significado, indica su aridad y especifica el tipo de cada uno de sus argumentos.

Constantes:

* Caballo = C
* Mickey Mouse = MM
* = E

Variables:

* x, y

Predicados:

* EsAnimal(x) = Dice si el objeto introducido es animal (True) o no (False)
* Caballo(x) = Dice si el objeto Introducido es un Caballo
* MM(x) = Dice si el objeto introducido es Mickey Mouse
* Haber2(x) = Dice si hay 2 o más de cada especie
* Haber1(x) = Di si hay al menos un objeto que pertenece a x
* EsEspecie(x, y) = Dice si un x es un animal de la especie y (dice si x pertenece a y)
* CuatroPatas(x) = Dice si x tiene cuatro patas

Funciones:

* especie(x) = Dice la especie de X

ARIDAD??

TIPO DE ARGUMENTOS??

2. Considera la siguiente base de conocimiento:

• ∀x [ A(x) ⇔ Β(x) ]

• ∃x C(x)

• [ ∃y C(y) ] ⇒ [ ∀y ¬A(y) ]

Usando resolución por refutación, responde a las siguientes preguntas:

¿Es ∀x B(x) consecuencia lógica de la base de conocimiento?

1.- Añadimos la nueva fórmula negada a la base de conocimiento

¬(∀x) B(x) == (∃x) ¬B(x)

2.- Lo pasamos a Fórmula normal conjuntiva

2.1.- Eliminar Implicaciones 🡪 NO HAY

2.2.- Eliminar Negaciones 🡪 Combinación de Negación con Cuantificadores

¬(∀x) B(x) == (∃x) ¬B(x)

2.3.- Estandarizar Variables 🡪 Ya está estandarizada

2.4.- Skolenizamos Variables

(∃x) ¬B(x) == ¬B(f(x)) (Constante de Skole = f(x)

2.5.- Convertir a forma Prenexa 🡪 Hecho

2.6.- Eliminar Cuantificadores Universales 🡪 Hecho

2.7.- Convertir a Conjunto Disyuntivo 🡪 Hecho

Ahora inferimos sobre esta

W1 = ¬B(f(x))

¿Es ∃x ¬B(x) consecuencia lógica de la base de conocimiento?

Añadimos a la base de conocimiento

(∃x) ¬B(x) == ¬(∀x) B(x)

Ahora inferimos sobre esta

Cuando pases expresiones a forma normal conjuntiva detalla los pasos intermedios realizados.

3. Consideremos la siguiente ontología para números naturales:

Constante: 0

Variables: k, n, m, (números naturales).

Predicados:

S2 [ejemplo: S(n,m) evalúa a True si m es el siguiente valor a n en la secuencia de números naturales]

>2 [ejemplo: (n > m) evalúa a True si n es mayor que m]

<2 [ejemplo: (n < m) evalúa a True si n es menor que m]

B3 [ejemplo: B(k, n, m) evalúa a True si k es mayor que n y menor que m]

Igual2 [ejemplo: Igual(n, m) evalúa True si n es igual a m]

Funciones:

s1 [ejemplo: s(n) es una referencia al número natural sucesor de n]

• No está permitido introducir constantes adicionales.

• Se puede introducir, únicamente en caso de que sean necesarios, predicados o funciones adicionales, con la excepción de la relación de igualdad.

• Asimismo, la base de conocimiento podría ser incompleta. Se pueden introducir sentencias adicionales únicamente en caso de que sean estrictamente necesarias para responder a la cuestión planteada.

a. Formaliza la siguiente base de conocimiento en lógica de predicados:

[1] “Todos los números naturales, incluido el cero, tienen un sucesor”.

(∀k) (∀n) (3m) (s(k) ^ s(0) => S(k,n) ^ S(0, m))

[2] “Todos los números naturales, excepto el cero, son sucesores de otro natural”.

(∀k) (∀n) (S(k,n+))

[3] “Un número natural está entre (indicado por el predicado B) otros dos si es estrictamente mayor que el primero y estrictamente menor que el segundo”.

[4] “Dado un número natural n, existe número natural número natural tal que no es estrictamente mayor que n y tampoco es estrictamente menor que n”.

[5] Proporciona una definición recursiva para el predicado >2 basada en el predicado S2 y la función s1.

b. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva.

c. Utilizando el truco de Green e inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal, etc.), proporciona una respuesta a la pregunta: ¿Qué números naturales se encuentran entre el 0 y 3 (es decir, son estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 3)?

4. En el examen de matemáticas nos han pedido demostrar si un número irracional elevado a un número irracional puede ser racional. Vamos a realizar la demostración utilizando lógica de predicados. Para ello utilizaremos la siguiente ontología:

Constantes: 2, √2 , √2 √2

Variables: x, y, z

Predicados:

Pow3 [ejemplo: Pow(x,y,r) evalúa a True si r es el resultado de elevar x a y, a False en caso contrario]

R1 [ejemplo: R(x) evalúa a True si x es racional, a False si x es irracional]

a. Formaliza la siguiente base de conocimiento en lógica de predicados:

[1] 2 es un número racional.

[2] La raíz cuadrada de 2 es un número irracional.

[3] √2 √2 es el resultado de elevar la raíz cuadrada de 2 a la raíz cuadrada de 2.

[4] 2 es el resultado de elevar √2 √2 a la raíz cuadrada de 2.

b. Utilizando inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal), proporciona una respuesta a la pregunta:

¿Puede ser racional un número (z) que es el resultado de elevar un número irracional (x) a un número irracional (y)?

Las respuestas posibles a esta pregunta son sí, no, o no es posible determinarlo.

c. En caso de que la respuesta al apartado anterior fuera positiva ¿Cuáles serían los valores de x, y, z?

Utiliza el truco de Green con un predicado de respuesta que dependa de tres variables para encontrar una cláusula que, al ser interpretadas proporcione la respuesta solicitada. Deriva por inferencia dicha cláusula y proporciona su interpretación en lenguaje natural.

5. Consideremos la siguiente ontología para listas:

Constantes: NIL (lista vacía), a, 2, 3.

Variables: x,y,z,… (elementos) l,l1,l2,… (listas)

Predicados:

Int1 [Ejemplo: Int(x) es Verdadero si x es un número entero]

Empty1 [Ejemplo: Empty(l) es Verdadero si l es la lista vacía]

Member2 [Ejemplo: Member(x, l) es Verdadero si x es pertenece a la lista l]

Funciones:

first1 [Ejemplo: first(l) es una referencia al primer elemento de la lista l]

rest1 [Ejemplo: rest(l) es una referencia a la lista que contiene a todos los elementos de la lista l excepto el primero, y en el mismo orden que en l]

cons2 [Ejemplo: cons(x,l) es una referencia a una lista cuyo primer elemento es x y cuyo resto es la lista l]

Se pueden utilizar los predicados correspondientes a estas funciones. Por ejemplo, el resultado de la evaluación First(x,l) es Verdadero si x es el primer elemento de la lista l.

**Utilizando únicamente los elementos especificados en la ontología**, ¿qué números enteros pertenecen a la lista (a 2 3)?

Para ello:

a. Escribe en la base de conocimiento mínima a partir de la cual es posible realizar inferencia para responder a la cuestión propuesta.

Debes proporcionar tanto la frase en lenguaje natural como la correspondiente fórmula bien formada (FBF) en lógica de predicados.

En caso de que sean estrictamente necesarios, se pueden introducir predicados y funciones adicionales.

Incluid en la ontología dichas funciones o predicados indicando su aridad y describiendo su significado.

b. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva.

c. Utilizando el truco de Green e inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal, etc.), proporciona una respuesta a la cuestión planteada.